פונקציות

יהיו קבוצות, היא פונקציה אם לכל קיים יחיד לa(ח"ע)

# דוגמה

לקבוצת הערכים המתקבלים בB נקרא תמונה. B נקרא טווח וA נקרא תחום

# הגדרה

אם לכל קיים כך ש אזי f על

טם לכל זוג איברים שונים , מתקיים אזי f חח"ע

## דוגמה

על מנת להוכיח שf חח"ע מספיק להראות שאם אזי

## דוגמה

. מהי ?

### תשובה

F הינה סדרה

# הגדרה

תהי מוגדרת בתחום . אזי אומרים שf חסומה בS אם קיים כך שלכל

## דוגמה

חסומה על כל קבוצה סופית , אבל לא חסומה על

# הגדרה

אם לכל מתקיים:

אזי f מונוטונית עולה ממש

אזי f מונוטונית עולה

אזי f מונוטונית יורדת ממש

אזי f מונוטונית יורדת

# דוגמה

, עולות ממש בתחום ההגדרה שלהן.

גבולות של פונקציות

ישנן 2 הגדרות לגבול של פונקציה – היינה וקושי. נלמד את שתיהן ואתם תוכיחו בבית שהן שקולות.

# הגדרה(גבול פונקציה לפי קושי)

*אם לכל קיים כך שלכל x המקיים מתקיים   
f מוגדרת בסביבה מנוקבת("מנקבים" את ) של*

# דוגמה

תהי . הוכח ש

## הוכחה

– לא מוגדר. ברור שf מוגדרת בסביבה מנוקבל שת 2. צ"ל שלכל קיים כך שלכל מתקיים . אבל אם אזי ולכן   
אזי לכל ניקח וסיימנו.

# תרגיל

הוכח לפי ההגדרה:

## פתרון

יהי . צ"ל כך שאם אז :

רוצים להקטין את . יודעים ש, לכן לכן לכן . ניקח => . לכן . בסה"כ ניקח וגם וסה"כ נקבל

# תרגיל

הוכח ע"פ ההגדרה ש

## פתרון

יהי . צ"ל כך שלכל מתקיים   
. צ"ל שקיים כך שלכל מתקיים . נניח , לכן => =>   
רוצים ש כלומר רוצים ש => . לכן ניקח וגם . נקבל שעבור מתקיים

# הגדרה(גבול פונקציה לפי היינה)

אם לכל סדרה המקיימת מתקיים

## הערה

מתי לפונקציה אין גבול לפי היינה?

### תשובה

אם קיימות שתי סדרות שונות שמקיימות את התנאים כך ש

או

קיימת סדרה אחת כך שלא קיים הגבול

# דוגמה

הוכח ש לכל

## פתרון

נניח , ואז . צ"ל . לפי אריתמטיקה של גבולות

## מסקנה

קל להסיק שלכל פולינום f מתקיים

# דוגמה

הוכח שלא קיים הגבול

## פתרון

צ"ל 2 סדרות שמקיימות אבל . ניקח .𝑒 ות גבול נום ם הגבול ך שינה ואז , אבל .

# דוגמה

תהי f המוגדרת ע"י . הוכח שלא קיים גבול לפונקציה פרט לנקודה

## פתרון

אם ניקח וניקח ואז

עבור נוכיח שקיים גבול לפי קושי: יהי צ"ל כך שאם מתקיים . ברור ש. ניקח ומש"ל